Komplexe Zahlen

Mit speziellen Funktionen abbilden.

Datei Nr. 50025

Stand 12. November 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Abbildung f der komplexen z-Ebene in die komplexe w-Ebene durch

$$f:\quad z \to w = 2\cdot\bar{z}\cdot(i-z)$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung.

b) Die Halbgerade g sei Winkelhalbierende des 1. Quadranten der z-Ebene (45°-Gerade).
Bestimmen Sie das Bild von g bei der Abbildung f und zeichnen Sie dieses Bild.

Lösung:

a) **Fixpunktbedingung:** $f(z) = z \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\bar{z}\cdot(i-z) = z$

Mit $z = x + iy$ folgt: $2(x-iy)(i-x-iy) = x+iy$

$$2\left(ix + y - x^2 + \cancel{ixy - ixy} - y^2\right) = x+iy$$

$$\left(2y - 2x^2 - 2y^2\right) + i\cdot(2x) = x+iy$$

Koeffizientenvergleich: $\begin{Bmatrix} 2y - 2x^2 - 2y^2 = x \\ y = 2x \end{Bmatrix}$

y ersetzen: $4x - 2x^2 - 2\cdot 4x^2 = x$

$$-10x^2 + 3x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(-10x+3) = 0$$

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = \tfrac{3}{10}$$

Zugehörige y-Werte: $y_1 = 2\cdot 0 = 0$ und $y_2 = 2\cdot\tfrac{3}{10} = \tfrac{3}{5}$

Ergebnis: Die Fixpunkte sind (in komplexer Schreibweise) $z_1 = 0$ und $z_2 = 0{,}3 + 0{,}6\cdot i$

b) Die Halbgerade g sei Winkelhalbierende des 1. Quadranten der z-Ebene (45°-Gerade).
Bestimmen Sie das Bild von g bei der Abbildung f und zeichnen Sie dieses Bild.

Umstellung der Abbildungsgleichung $w = z - \frac{3}{z} \quad\Rightarrow\quad \boxed{u + iv = x + iy - \frac{3}{x+iy}}$:

$$w = 2\cdot\bar{z}\cdot(i-z) \quad\Rightarrow\quad u + iv = 2(x-iy)(i-x-iy)$$

$$u + iv = 2(x-iy)(i-x-iy) = 2\left(ix + y - x^2 + \cancel{ixy - ixy} - y^2\right) = \left(2y - 2x^2 - 2y^2\right) + i\cdot(2x)$$

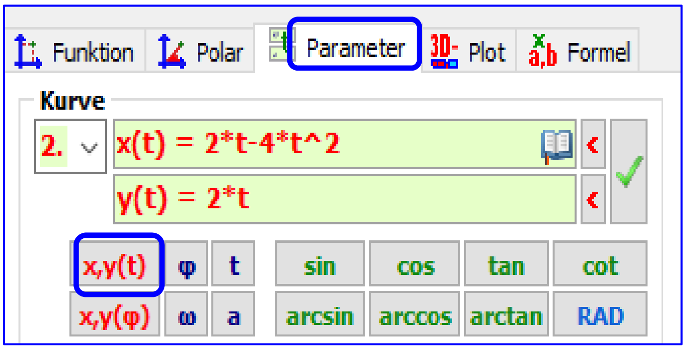
Koeffizientenvergleich: $\begin{Bmatrix} u = 2y - 2x^2 - 2y^2 \\ v = 2x \end{Bmatrix}$

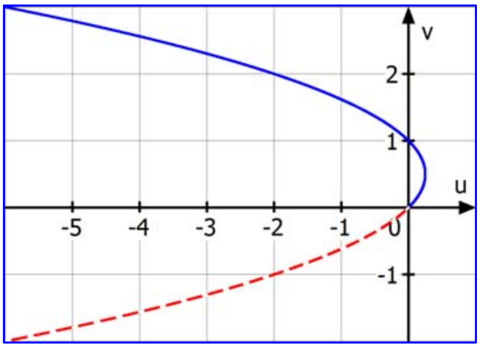
Die Winkelhalbierende des 1. Quadranten der z-Ebene hat die Gleichung: $y = x$ für $x > 0$

Ersetze y durch x in den Abbildungsgleichungen: $\begin{Bmatrix} u = 2x - 4x^2 \\ v = 2x \end{Bmatrix}$

Das ist eine Parameterdarstellung der Bildkurve für x>0.

Einschub: So stellt man diese Gleichung durch **MatheGrafix** dar:





Der Parameter heißt hier t. Und $t > 0$ führt zu $v > 0$. Der gestrichelte Parabelbogen entfällt also hier.

Umrechnung der Parametergleichung in eine Koordinatengleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} u = 2x - 4x^2 \\ v = 2x \end{array}\right\} \quad 8$$

Hier geht das zufälligerweise ganz einfach:

Ich ersetze 2x durch v: $u = v - v^2$

Die Gleichung $v^2 - v = -u$

Quadratische Ergänzung: $v^2 - v + \boxed{\tfrac{1}{4}} = -u + \boxed{\tfrac{1}{4}}$

Ziel: $\left(v - \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\left(u - \tfrac{1}{4}\right)$

stellt eine nach links geöffnete Parabel dar. Sie hat den Scheitel: $S\left(\tfrac{1}{4} \mid \tfrac{1}{2}\right)$

Wegen $x > 0$ darf man nur $v > 0$ verwenden.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Abbildung f der komplexen z-Ebene auf sich durch

$$f(z) = 3zi - z\bar{z}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung f.

b) Der Kreis k durch $P(-1\,|\,-3) \triangleq p = -1 - 3i$ und $Q(0\,|\,0) \triangleq q = 0 + 0i$.

Sein Mittelpunkt liegt auf der imaginären Achse. Bestimme die komplexe Gleichung von k.

c) Das Bild k' von k unter f ist eine Ellipse. Bestimme ihre Gleichung.

Lösung: auf CD